

摺疊式超立方體物聯網拓樸上探討 可容錯之迴路嵌入性質

郭哲男

稻江科技暨管理學院
動畫遊戲設計學系助理教授
fkikimo@hotmail.com

鄭煜輝

朝陽科技大學
資訊與通訊系副教授
yuhuei.cheng@gmail.com

楊舜光

稻江科技暨管理學院
動畫遊戲設計學系碩士生
ip02431941@yahoo.com.tw

摘要

設計物聯網架構是現今物聯網應用的時代最重要而且不可或缺的部份。迴路是分散式計算中最基本的網路結構，它適合應用於需要較少通訊花費的簡單演算法上面，也適合應用於網路架構上的控制或資料流架構上的分散式計算。本研究中，我們基於摺疊式超立方體物聯網拓樸上開發出當可容錯點情況下之可包含任意邊的奇數長度迴路嵌入性質。

關鍵詞：物聯網，超立方體，摺疊式超立方體，容錯嵌入，迴路。

Abstract

The design of physical network architecture is the most important and indispensable part of the Internet of Things (IoTs). Cycle is the most basic network structure in distributed computing. It is suitable for simple algorithms that require less communication overhead, or for distributed computation on control or data flow architectures on network architectures. In this study, we develop an odd length cycles embedding properties that can contain any edge in the case of a fault-tolerant point in folded hypercubes based IoT.

Keywords: Internet of Things (IoTs), hypercubes, folded hypercubes, cycle.

1. 前言

物聯網(Internet of Things, IoT)為人與物以及物與物之間的交互關係，讓所有能行使獨立功能的普通物體實作互聯互通的網路[1]。對一個網路而言，各個節點可能是處理器，或者是一部計算機，甚至是另一個網路，但我們所關

心的問題常著重於其拓樸特性(topological properties)，因為從拓樸特性可以看出整個網路的傳輸延遲及可靠度(reliability)等性質，進而瞭解該網路的優缺點及適用場合。因此，在網路設計時最注重的兩個要點，就是可靠度及最大傳輸延遲時間。可靠度過低或傳輸延遲時間過高，都會影響網路的服務品質，所以在網路的設計上，可靠度、連通度(connectivity)及直徑(diameter)等拓樸特性常被我們廣泛用來量度一個網路的好壞。其中可靠度常泛指其容錯(fault-tolerant)的能力，也就是當有邊或節點損壞時，網路本身還能保有多少原本特性。而連通度(邊連通度)則是指對一個網路，至少要拆掉幾個節點(邊)，才有可能使其不連通，或只剩單一節點(trivial graph)。除此之外，一個網路是否能很有效的模擬其他網路，也是另一種衡量網路好壞的方式，嵌入一個客圖(guest graph) G 至另一個主圖(host graph) H 是一種點對點映射的 f 函數；從 G 的點集合映至 H 的點集合。 G 的邊透過 f 對映至 H 的路徑。嵌入的策略可以提供我們使用 H 來模擬 G 的機制。因此，被設計在 G 上執行的演算法，也可以在 H 上執行。有關嵌入的問題，常需考慮膨脹度(dilation)及壅塞度(congestion)等參數。以甲網路模擬乙網路時，甲網路也許需要用一條路徑來模擬乙網路的一個邊，在模擬乙網路的所有邊時，所須用到的最長路徑之長度稱為膨脹度，這些路徑可能用到甲網路某些相同的邊，而使用最多次相同邊的次數以壅塞度來代表。對膨脹度來說，所產生的值越小，表示客圖 G 中的演算法用於主圖 H 時，其傳遞訊息的時間延遲越少，所以演算法執行時不會有太大的效能損失；同樣的，壅塞度越小，表示各處理機間的通訊較不擁擠。如果膨脹度及壅塞度皆為一的情況下，則視為最佳模擬。

路徑(path)和迴路(cycle)是分散式計算中最基本的兩種網路結構，很適合用來發展出一

套有效率且低通訊成本的演算法。在過去的研究當中，有很多有效率的演算法都是基於路徑或者是迴路所設計，用來解決代數問題 (algebraic problems)，圖形問題 (graph problems)，以及平行處理的應用問題 (parallel applications)。

超立方體是一個眾所皆知最多用途且高效率的機器架構。它擁有相當多的傑出特性，例如：遞迴性的結構、規則性、對稱性、低分支度...等。設計一個大規模的平行系統和分散式系統是相當重要的，然而在設計物聯網網絡架構時，主要常發生的問題都在於處理器之間要如何地連接，才能使之發揮最大的效能，這就是在物聯網上互連網路 (interconnection networks) 的問題，此問題常透過圖形理論的方式來分析及求解。一種被擴充的超立方體，稱作摺疊式超立方體 (folded hypercube) 也在學術上被廣泛的研究，它是原本的超立方體再加上最遠任意兩個點的邊，也就是說，當兩個點編號互補時就會有邊存在。而且摺疊式超立方體也已經被證明出，在許多方面的測量上能夠改進超立方體的系統效能，例如：直徑約只有超立方體的一半。

由於摺疊式超立方體具有許多優異的性質，引發我們關注研究的興趣，尤其在現今物聯網的時代。本研究針對 Cheng et al. 在 2013 年發表文獻中 [2] 的嵌入奇數長度迴路探討，以於摺疊式超立方體物聯網網絡拓樸上開發出當可容錯點情況下之可包含任意邊的奇數長度迴路嵌入性質。

2. 方法

以 Q_n 表示一個 n 維的超立方體。摺疊式超立方體是目前很多變形的超立方體其中的一種。一個 n 維的摺疊式超立方體 (用 FQ_n 來表示) 是 Q_n 的一種延伸，它的建構方式是在 Q_n 中針對每一對點編號互為補數的點之間增加一個邊。下列的參考文獻可以找到關於摺疊式超立方體的相關資料 [2-21]。

因為當物聯網網絡架構真正被使用時，點和邊的損毀經常發生，所以討論網路的損毀狀況，在實際上是相當有意義的。容錯嵌入的問題，不管是 Q_n 或是 FQ_n ，近幾年均被高度的注意，下列的參考文獻中可以找到相關資料 [2-5, 8-30]。摺疊式超立方體因為具有許多優越的性質，因此被廣泛的研究，表一詳列近年來各方學者在摺疊式超立方體架構上嵌入迴路 (cycle) 的研究成果。

本研究透過以上對於摺疊式超立方體網路拓樸嵌入問題的探討與文獻研讀，以於摺疊式超立方體物聯網網絡拓樸上開發出當可容錯點情況下之可包含任意邊的奇數長度迴路嵌入性質。

表 1 摺疊式超立方體架構上嵌入迴路的相關文獻

<i>Range of faults</i>	<i>Length</i>	<i>Ref.</i>
$ \tilde{E}(FQ_n) \leq n-1$	A cycle of length 2^n Every fault-free edge lies on a cycle of every even length	[24]
$ \tilde{E}(FQ_n) \leq n-1$	from 4 to 2^n and every odd length from $n+1$ to $2^n - 1$ if n is even	[4]
$ \tilde{V}(FQ_n) + \tilde{E}(FQ_n) \leq n-1$	A cycle of length at least $2^n - 2 \tilde{V}(FQ_n) $	[10]
$ \tilde{E}(FQ_n) \leq 2n-3$ and at least two fault-free edges incident to each vertex	A cycle of length 2^n	[31]
$ \tilde{E}(FQ_n) \leq n-1$ and $ \tilde{V}(FQ_n) + \tilde{E}(FQ_n) \leq 2n-4$	A cycle of length at least $2^n - 2 \tilde{V}(FQ_n) $	[8]
$ \tilde{V}(FQ_n) + \tilde{E}(FQ_n) \leq 2n-4$ and at least two fault-free edges incident to each vertex	A cycle of length at least $2^n - 2 \tilde{V}(FQ_n) $	[12]
$ \tilde{V}(FQ_n) = 1$	A cycle of every even length from 4 to $2^n - 2$ if $n \geq 3$ and every odd length from $n+1$ to $2^n - 1$ if $n \geq 2$ is even	[13]
$ \tilde{E}(FQ_n) \leq 2n-3$ and at least two fault-free edges incident to each vertex	A cycle of every even length from 4 to 2^n if $n \geq 2$ and every odd length from $n+1$ to $2^n - 1$ if $n \geq 2$ is even	[14]

$|\tilde{E}(FQ_n)| \leq 2n-5$
and at least two
fault-free edges
incident to each
vertex

$$|\tilde{V}(FQ_n)| \leq n-2$$

$$|\tilde{V}(FQ_n)| = 1$$

$$|\tilde{E}(FQ_n)| + |\tilde{V}(FQ_n)| \leq n-1$$

$$|\tilde{E}(FQ_n)| + |\tilde{V}(FQ_n)| \leq n-2$$

$$|\tilde{V}(FQ_n)| \leq 2n-7$$

and at least four

Every fault-free
edge lies on a
cycle of every
odd length from
 $n+1$ to
 $2^n - 1$ if $n \geq 4$ is
even [16]

Every fault-free
edge lies on a
cycle of every
even length
from 4 to

$$2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)|$$

if $n \geq 3$ and
every odd length
from $n+1$ to

$$2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)| - 1$$

if $n \geq 2$ is even
Every fault-free
edge lies on a
cycle of every

even length
from 4 to $2^n - 2$
if $n \geq 3$ and

every odd length
from $n+1$ to $2^n - 1$
if $n \geq 2$ is even

A cycle of every
even length
from 4 to

$$2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)|$$

if $n \geq 3$ and every
odd length from
 $n+1$ to

$$2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)| - 1$$

if $n \geq 4$ is even
Every fault-free
edge lies on a
cycle of every
even length
from 4 to

$$2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)|$$

if $n \geq 3$ and every
odd length from
 $n+1$ to

$$2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)| - 1$$

if $n \geq 2$ is even
A cycle of every
even length [20]

fault-free edges
incident to each
vertex

from 4 to
 $2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)|$ if
 $n \geq 4$ and every
odd length from
 $n+1$ to
 $2^n - 2|\tilde{V}(FQ_n)| - 1$
if $n \geq 4$ is even

※符號表示說明如下。 $\tilde{V}(FQ_n)$ 為 n 維的摺疊式
超立方體(FQ_n)中的錯點集合。 $\tilde{E}(FQ_n)$ 為 n 維的
摺疊式超立方體(FQ_n)中的錯邊集合。

2.1 超立方體網路拓模

一個 n 維的超立方體以符號 Q_n 來表示，是
一個簡單的無向圖；其中包含 2^n 個點、 $n \times 2^{n-1}$
個邊。 Q_n 中的每一個點均使用一組獨特的二元
字串來表示 $b_1b_2 \dots b_i \dots b_{n-1}b_n$ 其中 $b_i \in \{0,1\}$ ，
 $1 \leq i \leq n$ 。點 $b_1b_2 \dots b_i \dots b_{n-1}b_n$ 和 點
 $b_1b_2 \dots \bar{b}_i \dots b_{n-1}b_n$ 兩點間透過一個邊相連，而此
邊是落於維度 i 上(亦即， i -dimensional edge)，
 $1 \leq i \leq n$ ，且 $\bar{b}_i$ 為 b_i 之一元補數 (1's
complement)。下圖 1 為一個 2 維及一個 3 維的
超立方體圖形(Q_2 及 Q_3)。

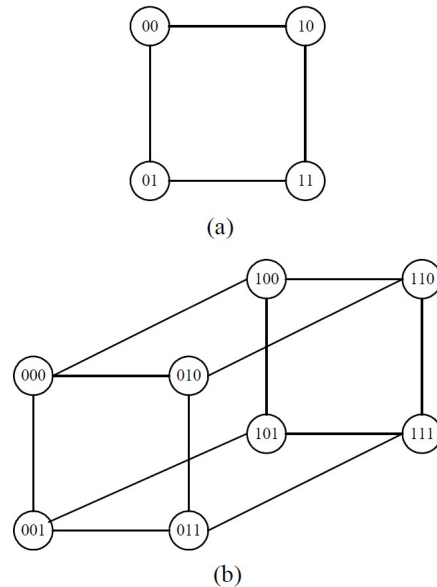


圖 1. (a) Q_2 和 (b) Q_3 的拓模圖形

令 $d_H(x, y)$ 代表兩個點 x 和 y 的漢明距離
(Hamming distance)，其意為 x 和 y 編碼中相異
之位元個數(i.e., bitwise XOR 的位元 1 的總

數)。若 $x = x_1x_2 \dots x_i \dots x_{n-1}x_n$ 為在 Q_n 中之任一點，則 $x^{(i)} = x_1x_2 \dots \bar{x}_i \dots x_{n-1}x_n$ ， $1 \leq i \leq n$ 為其相鄰點，因此，與 x 相鄰之點總共有 n 個，分別為 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}$ ，我們亦可稱 Q_n 為 n 規則圖(n -regular graph)；另外，由於 Q_n 的直徑(diameter)為 n ，則 $d_{Q_n}(x, y) = d_H(x, y)$ 。

2.2 摺疊式超立方體網路拓樸

一個 n 維的摺疊式超立方體以符號 FQ_n 來表示，是一個簡單的無向圖；其中包含 2^n 個點、 $(n \times 2^{n-1} + 2^{n-1})$ 個邊。 FQ_n 中的每一個點均使用一組獨特的二元字串來表示 $b_1b_2 \dots b_i \dots b_{n-1}b_n$ 其中 $b_i \in \{0,1\}$ ， $1 \leq i \leq n$ 。而 FQ_n 上的邊由兩種連接方式所構成：

(1) i -dimensional edge：點 $b_1b_2 \dots b_i \dots b_{n-1}b_n$ 和點 $b_1b_2 \dots \bar{b}_i \dots b_{n-1}b_n$ 之間所連接的邊，這個邊是落於維度 i 上，其中 $1 \leq i \leq n$ 。

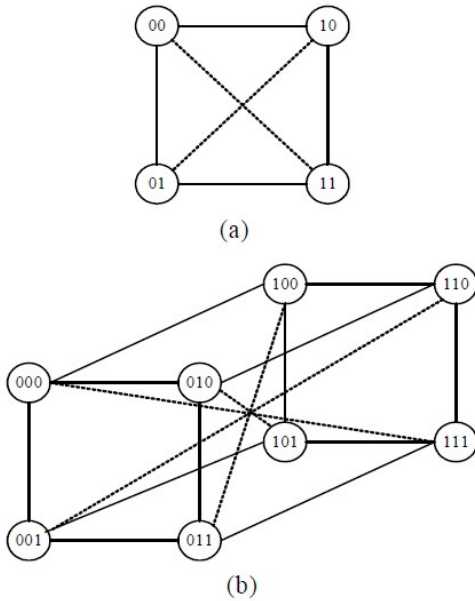


圖 2. (a) FQ_2 和 (b) FQ_3 的拓樸圖形

(2) complement edge：點 $b_1b_2 \dots b_i \dots b_{n-1}b_n$ 和點 $\bar{b}_1\bar{b}_2 \dots \bar{b}_i \dots \bar{b}_{n-1}\bar{b}_n$ 之間所連接的邊，我們稱此邊為補邊。

圖 2 代表一個 2 維及一個 3 維的摺疊式超立方體圖形(FQ_2 及 FQ_3)，其中實線邊代表

i -dimensional edge，虛線邊代表 complement edge。

一個 n 維的摺疊式超立方體 FQ_n ，是 Q_n 在它全部的點上增加有規則的一種連結。具體而言， FQ_n 是在兩個點之間增加一個連結的邊，這個邊的連接條件就是落於任兩點在 Q_n 中互為補數的點之間；例如：假設一個點的位置是 $b_1b_2 \dots b_i \dots b_{n-1}b_n$ ，它有多新增一個邊連接到點 $\bar{b}_1\bar{b}_2 \dots \bar{b}_i \dots \bar{b}_{n-1}\bar{b}_n$ ，這個邊是額外增加在它原來所有的 n 個邊 (即 i -dimensional edge) 之外。所以 FQ_n 比 Q_n 中的邊還多增加 2^{n-1} 個邊，即 2^{n-1} 個補邊，我們可以 E_s 代表 FQ_n 中的補邊集合。

若 $x = x_1x_2 \dots x_i \dots x_{n-1}x_n$ 為在 FQ_n 中之任一點，則 $x^{(i)} = x_1x_2 \dots \bar{x}_i \dots x_{n-1}x_n$ ， $1 \leq i \leq n$ ，與 $\bar{x} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_{n-1}\bar{x}_n$ 均為其相鄰點，因此，與 x 相鄰之點總共有 $n+1$ 個，分別為 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}, \bar{x}$ ，我們亦可稱 FQ_n 為 $n+1$ 規則圖($n+1$ -regular graph)；另外，由於

FQ_n 的直徑 (diameter) 為 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ，則

$$d_{FQ_n}(x, y) = d_H(x, y) \quad \text{或}$$

$$d_{FQ_n}(x, y) = n+1 - d_H(x, y)。$$

3. 結果

3.1 研究目標

在本研究中，我們以摺疊式超立方體網路拓樸架構(FQ_n)作為我們的嵌入主圖，而以各式奇數長度的迴路作為嵌入的子圖，首先令 FF_v 代表 FQ_n 中的錯點集合，接著，我們於 FQ_n 中開發出當可容錯點情況下之可包含任意邊的奇數長度迴路嵌入性質為：當 $n \geq 2$ 為偶數時， $FQ_n - FF_v$ 中每個無錯(Fault-free)的邊，均可被嵌入於奇數長度迴路 $n+1 \sim 2^n - 2|FF_v| - 1$ 中。

3.2 輔助定理

輔助定理 1. [7]

對於 $Q_n = \overbrace{***\dots*}^n = *^n$ 的 i 維分割(i -partition)而

言， $1 \leq i \leq n$ ；表示針對 Q_n 沿著維度 i 分割成兩個 Q_{n-1} ，其中 $Q_{n-1}^{0i} = *^{i-1}0*^{n-i}$ ， $Q_{n-1}^{1i} = *^{i-1}1*^{n-i}$ 。簡而言之，當維度 i 不會造成意義上不明確時，我們可分別令 $Q_{n-1}^{0i} = Q_{n-1}^0$ ， $Q_{n-1}^{1i} = Q_{n-1}^1$ 。而連接 $Q_{n-1}^0 = *^{i-1}0*^{n-i}$ 和 $Q_{n-1}^1 = *^{i-1}1*^{n-i}$ 的邊稱為臨界邊 (crossing edges)，以 E_c 代表之。

輔助定理 2. [29]

令 u 和 v 代表 Q_n 中的任意兩個無錯點且 F_v 代表 Q_n 中的錯點集合，則在且情況下，中可存在無錯的路徑長度 l 為 $d_{Q_n}(u, v) + 2 \leq l \leq 2^n - 2|F_v| - 1$ ， $2|(l - d_{Q_n}(u, v))|$ ，其中 $d_{Q_n}(u, v)$ 代表 u 和 v 在 Q_n 中的最短路徑。

輔助定理 3. [11]

在 $n \geq 3$ 且 $|F_v| \leq n - 2$ 情況下， $Q_n - F_v$ 中的任意無錯邊均可被包含於偶數長度迴路 $4 \sim 2^n - 2|F_v|$ 中。

輔助定理 4. [18, 31]

當 $n \geq 2$ 為偶數且 $|FF_v| \leq 1$ 情況下， $FQ_n - FF_v$ 中的任意無錯邊均可被包含於奇數長度迴路 l 為 $n + 1 \leq l \leq 2^n - 1$ 。

輔助定理 5. [5]

當 $n \geq 2$ 時， FQ_n 中的任意邊 e 可存在於 n 個長度為 $n + 1$ 的迴路 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 中，其中 $C_i \cap C_j = \{e\}$ ， $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $i \neq j$ 。

3.3 主要定理

定理 1.

當 $n \geq 2$ 為偶數且 $|FF_v| \leq n - 2$ 情況下， $FQ_n - FF_v$ 中的任意無錯邊均可被包含於奇數長度迴路 l 為 $n + 1 \leq l \leq 2^n - 2|FF_v| - 1$ 。

證明：

當 $n = 2$ 時， $|FF_v| = 0$ ，我們可以很直觀的確定 FQ_2 中的任意邊均可被包含於奇數長度為 3 的

迴路中。因此，我們接著論證當 $n \geq 4$ 為偶數情況下的奇數長度迴路嵌入狀況。首先，令 $e = (u, v)$ 代表 FQ_n 中的任意邊，則我們透過以下的幾個案例進行分析與探討：

案例 1： $|FF_v| \leq 1$

根據輔助定理 4 得知，當 $n \geq 4$ 時， $FQ_n - FF_v$ 中的任意無錯邊均可被包含於奇數長度迴路 l 為 $n + 1 \leq l \leq 2^n - 1$ ，因此此案例分析成立。

案例 2： $2 \leq |FF_v| \leq n - 2$

由於 $|FF_v| \leq n - 2$ ，根據輔助定理 5 得知， $FQ_n - FF_v$ 中的任意無錯邊 e 均可被包含於奇數長度為 $n + 1$ 的迴路中。再者，由於 $|FF_v| \geq 2$ ，根據輔助定理 1 得知，我們可以在 FQ_n 中執行 i 維分割，其中 $1 \leq i \leq n$ ，使得 $|F_v^0| = |FF_v \cap Q_{n-1}^0| \geq 1$ 且 $|F_v^1| = |FF_v \cap Q_{n-1}^1| \geq 1$ 。為了方便論述，我們可以不失一般性的假設說， $i = n$ 。接著，我們透過以下幾個子案例進行細部的分析：

案例 2.1： $e \in Q_{n-1}^0$

為了論證 $FQ_n - FF_v$ 中任意無錯邊 e 均可被包含於奇數長度 l 為 $n + 3 \leq l \leq 2^{n-1} - 2|F_v^1| + 1$ 的迴路中，我們分成以下三個子案例進行分析。

案例 2.1.1： $\{\bar{u}, v^{(n)}\}$ 或 $\{u^{(n)}, \bar{v}\}$ 是無錯的。

我們可以不失一般性的假設說， $\{\bar{u}, v^{(n)}\}$ 是無錯的。值得注意的是，在 Q_{n-1}^0 中 $d_H(\bar{u}, v^{(n)}) = n - 2$ 。由於 $|F_v^1| \leq n - 3$ ，根據輔助定理 2 得知， Q_{n-1}^1 中存在無錯的偶數長度路徑 $P[\bar{u}, v^{(n)}]$ 為 n 到 $2^{n-1} - 2|F_v^1| - 2$ 。因此，在 $FQ_n - FF_v$ 中任意無錯邊 e 均可被包含於 $\langle u, \bar{u}, P[\bar{u}, v^{(n)}], v^{(n)}, v, u \rangle$ 奇數長度迴路中，且其長度 l 為 $n + 3 \leq l \leq 2^{n-1} - 2|F_v^1| + 1$ 。(可參考圖 3(a))

案例 2.1.2： $\{\bar{u}, v^{(n)}\}$ 中至少有一點是錯的且 $\{u^{(n)}, \bar{v}\}$ 中至少有一點是錯的，但是 $\{\bar{u}, v^{(n)}, u^{(n)}, \bar{v}\}$ 中至少有一點是無錯的。

我們可以不失一般性的假設說， $u^{(n)}$ 是無錯的。在 Q_{n-1}^0 中，令 x 為 v 的無錯相鄰點，使得 $x \neq u$ 且 $\bar{x}$ 是無錯的（如果不存在此點的話，則 $|FF_v| \geq n > n-2$ ，這樣與原本的假設 $|FF_v| \leq n-2$ 產生矛盾）。接著，值得注意的是，在 Q_{n-1}^1 中 $d_H(\bar{x}, u^{(n)}) = n-3$ 。由於 $|F_v^1| \leq n-3$ ，根據輔助定理 2 得知， Q_{n-1}^1 中存在無錯的奇數長度路徑 $P[\bar{x}, u^{(n)}]$ 為 $n-1$ 到 $2^{n-1} - 2|F_v^1| - 1$ 。因此，在 $FQ_n - FF_v$ 中任意無錯邊 e 均可被包含於 $\langle u, v, x, \bar{x}, P[\bar{x}, u^{(n)}], u^{(n)}, u \rangle$ 奇數長度迴路中，且其長度 l 為 $n+3 \leq l \leq 2^{n-1} - 2|F_v^1| + 3$ 。（可參考圖 3(b)）

案例 2.1.3： $\{\bar{u}, v^{(n)}, u^{(n)}, \bar{v}\}$ 中所有的點均是錯點。

由於 $|FF_v| \geq 4$ ，我們僅考量此子案例發生的情況為 $n \geq 6$ 為偶數時。在 Q_{n-1}^0 中，令 x 為 u 的無錯相鄰點，使得 $x \neq v$ 且 $\bar{x}$ 是無錯的；接著，令 y 為 v 的無錯相鄰點，使得 $y \neq u$ 且 $y^{(n)}$ 是無錯的（如果不存在這些點的話，則 $|FF_v| \geq 2n > n-2$ ，這樣與原本的假設 $|FF_v| \leq n-2$ 產生矛盾）。接著，值得注意的是，在 Q_{n-1}^1 中 $d_H(\bar{x}, y^{(n)}) = n-4$ 。由於 $y^{(n)} \neq \bar{u}$ 且 $|F_v^1| \leq n-3$ ，根據輔助定理 2 得知， Q_{n-1}^1 中存在無錯的偶數長度路徑 $P[y^{(n)}, \bar{x}]$ 為 $n-2$ 到 $2^{n-1} - 2|F_v^1| - 2$ 。因此，在 $FQ_n - FF_v$ 中任意無錯邊 e 均可被包含於 $\langle u, v, y, y^{(n)}, P[y^{(n)}, \bar{x}], \bar{x}, x, u \rangle$ 奇數長度迴路中，且其長度 l 為 $n+3 \leq l \leq 2^{n-1} - 2|F_v^1| + 3$ 。（可參考圖 3(c)）

更進一步的，我們討論 $FQ_n - FF_v$ 中任意無錯邊 e 均可被包含於奇數長度 l 為

$2^{n-1} - 2|F_v^1| + 3 \leq l \leq 2^n - 2|FF_v| - 1$ 的迴路中。由於 $|F_v^0| \leq n-3$ ，根據輔助定理 3 得知， Q_{n-1}^0 中 $e = (u, v)$ 可存在於無錯的偶數迴路 C_0 長度為 l_0 ，且 $4 < l_0 - n - 1 \leq l_0 \leq 2^{n-1} - 2|F_v^0|$ 。值得注意的是，
 $l_0 - 1 \geq l - n - 2 \geq (2^{n-1} - 2|F_v^1| + 3) - n - 2 \geq 2^{n-1} - 3n + 7 > n - 3$ ，當 $n \geq 4$ 為偶數時。因此，在 C_0 上存在與 e 相異的邊 (x, y) ，使得 $\{\bar{x}, y^{(n)}\}$ 或 $\{x^{(n)}, \bar{y}\}$ 是無錯的。為了方便起見，我們可以不失一般性的假設說， $\{\bar{x}, y^{(n)}\}$ 是無錯的。由於 $|F_v^1| \leq n-3$ 且 $d_H(\bar{x}, y^{(n)}) = n-2$ ，根據輔助定理 2 得知， Q_{n-1}^1 中存在無錯的偶數路徑 $P[\bar{x}, y^{(n)}]$ 長度 l_1 為 $n \leq l_1 \leq 2^{n-1} - 2|F_v^1| - 2$ 。因此，在 $FQ_n - FF_v$ 中任意無錯邊 e 均可被包含於 $\langle x, \bar{x}, P[\bar{x}, y^{(n)}], y^{(n)}, y, P[y, x], x \rangle$ 奇數長度迴路中，且其長度 $l = (l_0 - 1) + 2 + l_1$ 為 $2^{n-1} - 2|F_v^1| + 3 \leq l \leq 2^n - 2|FF_v| - 1$ 。（可參考圖 3(d)）

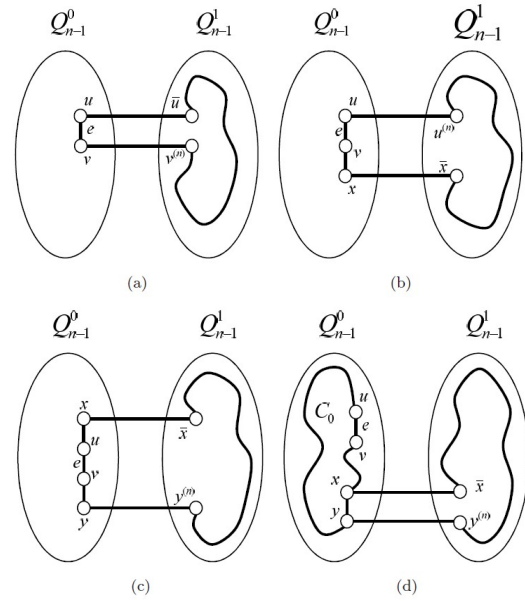


圖 3. 定理 1 的案例 2.1

案例 2.2： $e \in Q_{n-1}^1$

此案例的論證方式與案例 2.1 相似。

案例 2.3 : $e \in E_s$

在此案例論證中，我們假設 $e = (u, v) = (u, \bar{u}) \in E_s$ 。令 x 為 u 在 Q_{n-1}^0 中的無錯相鄰點，使得 $x^{(n)}$ 是無錯的(如果不存在此點的話，則 $|FF_v| \geq n-1 > n-2$ ，這樣與原本的假設 $|FF_v| \leq n-2$ 產生矛盾)。接著，根據輔助定理 3 得知， Q_{n-1}^0 中 (u, x) 可被包含於無錯的偶數長度迴路為 $4 \sim 2^{n-1} - 2|F_v^0|$ 中。由於 $|F_v^1| \leq n-3$ 且 $d_H(\bar{u}, x^{(n)}) = n-2$ ，根據輔助定理 2 得知， Q_{n-1}^1 中存在無錯的偶數長度路徑 $P[\bar{u}, x^{(n)}]$ 為 n 到 $2^{n-1} - 2|F_v^1| - 2$ 。因此，在 $FQ_n - FF_v$ 中任意無錯邊 e 均可被包含於 $\langle u, \bar{u}, P[\bar{u}, x^{(n)}], x^{(n)}, x, u \rangle$ 和 $\langle u, \bar{u}, P[\bar{u}, x^{(n)}], x^{(n)}, x, P[x, u], u \rangle$ 奇數長度迴路中，且其長度 l 為 $n+3 \leq l \leq 2^n - 2|FF_v| - 1$ 。(請參考圖 4)

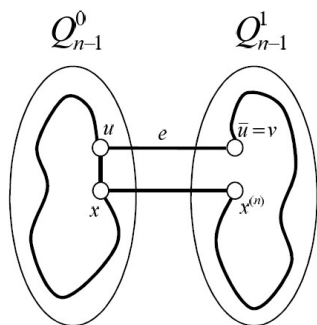


圖 4. 定理 1 的案例 2.3

案例 2.4 : $e \in E_c$

此案例的論證方式與案例 2.3 相似。

根據以上案例的分析結果得知，定理 1 是成立的。透過以上定理的推論，我們於摺疊式超立方體互連網路拓模架構上開發出了具正確性的演算法，以解決當可容錯點情況下之可包含任意邊的奇數長度迴路嵌入性質，此結果如預期性的可取代 Cheng et al. [2] 論文中的錯誤性作法。

4. 結論

容錯嵌入問題在設計物聯網架構與多重處理機系統或是分散式系統中是一個非常重

要的研究題材，並且有很多學者的研究方向都著重在點的容錯(vertex-fault-tolerant)或邊的容錯(edge-fault-tolerant)的網路拓模特性上。在本研究中，我們針對 Cheng et al. 在 2013 年發表文獻中[2]的嵌入奇數長度迴路探討，以於摺疊式超立方體物聯網拓模上開發出當可容錯點情況下之可包含任意邊的奇數長度迴路嵌入性質為：當 $n \geq 2$ 為偶數時， $FQ_n - FF_v$ 中每個無錯(Fault-free)的邊，均可被嵌入於奇數長度迴路 $n+1 \sim 2^n - 2|FF_v| - 1$ 中。

透過以上的研究過程，未來我們將會持續於物聯網容錯嵌入領域，做更深入的研究與探討。而我們也預計嘗試將所研究產出的相關研究方法應用於其他的網路拓模圖形上探討，亦或者再延伸摺疊式超立方體上容錯的範圍與種類，以繼續探討各種具可行性的物聯網拓模之嵌入性質。

致謝

感謝中華民國科技部(Ministry of Science and Technology, R.O.C.)對本研究經費的補助，補助計畫編號為：MOST105-2221-E-464-001 和 MOST105-2221-E-324-026。

參考文獻

- [1] 維基百科, "物聯網," Website: <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%89%A9%E8%81%94%E7%BD%91>.
- [2] D. Cheng, R.-X. Hao, and Y.-Q. Feng, "Cycles embedding on folded hypercubes with faulty nodes," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 161, pp. 2894-2900, 2013.
- [3] D. Wang, "Embedding Hamiltonian cycles into folded hypercubes with faulty links," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 61, pp. 545-564, 2001.
- [4] M.-J. Ma, J.-M. Xu, and Z.-Z. Du, "Edge-fault-tolerant hamiltonicity of folded hypercubes," *Journal of University of Science and Technology of China*, vol. 36, pp. 244-248, 2006.
- [5] J. M. Xu, M. J. Ma, and Z. Z. Du, "Edge-fault-tolerant properties of hypercubes and folded hypercubes," *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 35, pp. 7-16, 2006.

- [6] J.-F. Fang, "The bipanconnectivity and m-panconnectivity of the folded hypercube," *Theoretical Computer Science*, vol. 385, pp. 286-300, 2007.
- [7] S.-Y. Hsieh and C.-N. Kuo, "Hamiltonian-connectivity and strongly Hamiltonian-laceability of folded hypercubes," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 53, pp. 1040-1044, 2007.
- [8] J.-S. Fu, "Fault-free cycles in folded hypercubes with more faulty elements," *Information Processing Letters*, vol. 108, pp. 261-263, 2008.
- [9] S.-Y. Hsieh, "Some edge-fault-tolerant properties of the folded hypercube," *Networks*, vol. 51, pp. 92-101, 2008.
- [10] S.-Y. Hsieh, "A note on cycle embedding in folded hypercubes with faulty elements," *Information Processing Letters*, vol. 108, p. 81, 2008.
- [11] S.-Y. Hsieh and T.-H. Shen, "Edge-bipancyclicity of a hypercube with faulty vertices and edges," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 156, pp. 1802-1808, 2008.
- [12] S.-Y. Hsieh, C.-N. Kuo, and H.-H. Chou, "A further result on fault-free cycles in faulty folded hypercubes," *Information Processing Letters*, vol. 110, pp. 41-43, 2009.
- [13] S.-Y. Hsieh, C.-N. Kuo, and H.-L. Huang, "1-vertex-fault-tolerant cycles embedding on folded hypercubes," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, pp. 3094-3098, 2009.
- [14] C.-N. Kuo and S.-Y. Hsieh, "Pancyclicity and bipancyclicity of conditional faulty folded hypercubes," *Information Sciences*, vol. 180, pp. 2904-2914, 2010.
- [15] C.-N. Kuo, H.-H. Chou, N.-W. Chang, and S.-Y. Hsieh, "Fault-tolerant path embedding in folded hypercubes with both node and edge faults," *Theoretical Computer Science*, vol. 475, pp. 82-91, 2013.
- [16] D. Cheng, R.-X. Hao, and Y.-Q. Feng, "Odd cycles embedding on folded hypercubes with conditional faulty edges," *Information Sciences*, vol. 282, pp. 180-189, 2014.
- [17] C.-N. Kuo, C.-W. Lee, N.-W. Chang, and K.-H. Shih, "Extended fault-tolerant bipanconnectivity and panconnectivity of folded hypercubes," *International Journal of Mobile Communications*, vol. 12, pp. 397-410, 2014.
- [18] C.-N. Kuo, "Every edge lies on cycles embedding in folded hypercubes with vertex-fault-tolerant," *Theoretical Computer Science*, vol. 589, pp. 47-52, 2015.
- [19] C.-N. Kuo, "Pancyclicity and bipancyclicity of folded hypercubes with both vertex and edge faults," *Theoretical Computer Science*, vol. 602, pp. 125-131, 2015.
- [20] C.-N. Kuo, "Vertex-fault-tolerant cycles embedding in 4-conditionally faulty folded hypercubes," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 205, pp. 80-85, 2016.
- [21] C.-N. Kuo, "Every edge lies on cycles embedding in folded hypercubes with both vertex and edge faults," *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, vol. 8, p. 1650001, 2016.
- [22] S. Latifi, S.-Q. Zheng, and N. Bagherzadeh, "Optimal Ring Embedding in Hypercubes with Faulty Links," in *FTCS*, 1992, pp. 178-184.
- [23] S. Latifi and S.-Q. Zheng, "Determination of Hamiltonian cycles in cube-based networks using generalized gray codes," *Computers & electrical engineering*, vol. 21, pp. 189-199, 1995.
- [24] Y.-C. Tseng, "Embedding a ring in a hypercube with both faulty links and faulty nodes," *Information Processing Letters*, vol. 59, pp. 217-222, 1996.
- [25] C.-H. Tsai, J. J. Tan, T. Liang, and L.-H. Hsu, "Fault-tolerant hamiltonian laceability of hypercubes," *Information Processing Letters*, vol. 83, pp. 301-306, 2002.
- [26] J.-S. Fu, "Fault-tolerant cycle embedding in the hypercube," *Parallel computing*, vol. 29, pp. 821-832, 2003.
- [27] T.-K. Li, C.-H. Tsai, J. J. Tan, and L.-H. Hsu, "Bipanconnectivity and edge-fault-tolerant bipancyclicity of hypercubes," *Information Processing Letters*, vol. 87, pp. 107-110, 2003.
- [28] S.-Y. Hsieh, "Fault-tolerant cycle embedding in the hypercube with more both faulty vertices and faulty edges," *Parallel computing*, vol. 32, pp. 84-91, 2006.
- [29] M. Ma, G. Liu, and X. Pan, "Path embedding in faulty hypercubes," *Applied Mathematics and Computation*,

- vol. 192, pp. 233-238, 2007.
- [30] D.-W. Yang, Y.-Q. Feng, J. H. Kwak, and J.-X. Zhou, "Fault-tolerant edge-bipancyclicity of faulty hypercubes under the conditional-fault model," *Information Sciences*, vol. 329, pp. 317-328, 2016.
- [31] J.-M. Xu and M. Ma, "Cycles in folded hypercubes," *Applied Mathematics Letters*, vol. 19, pp. 140-145, 2006.