

運用模糊適應理論求解大型旅行者推銷員問題

田方治

國立台北科技大學

工業工程與管理所

e-mail :

fectien@ntut.edu.tw

陳彥霖

國立台北科技大學

工業工程與管理所

e-mail :

s4378013@ntut.edu.tw

摘要

旅行者推銷員問題為組合最佳化中相當著名的一問題，敘述簡單但解空間卻可以大的驚人，已被證明為一 NP-Complete 問題。在學術上可做為許多最佳化方法的比較基準，以及其產業可應用的領域廣大，於是在研究這方面的資料也相當廣泛；大致上有途程規劃、物流以及許多製程上最佳化路徑等問題，且在實務應用上求解時間便是一重要考量，於是業界普遍希望能在短時間內得到一近似最佳解。其中與印刷電路板製程做結合的例子不少，在國際題庫中，也有不少關於印刷電路板的範例問題。在本文中將會針對此類問題做研究，先以模糊適應共振理論將問題節點分群以產生數個子集合，使得問題的求解難度降低；接著在各個子集合中使用基因演算法求解 TSP，且在求解完各子集合後將各群連結，得到原求解難度的一個可行解。期望能藉由此一解題順序，在短時間內可得到一近似最佳解，以符合實務上印刷電路板製程之應用。

關鍵詞：旅行者推銷員問題、基因演算法、模糊適應共振理論。

Abstract

This study proposes an auxiliary method that would be useful for solving large traveling salesman problem by Fuzzy-ART.

Keywords: TSP, GA, Fuzzy-ART.

1. 前言

本研究主要研究方向是以針對印刷電路板上之大型旅行者推銷員問題的應用，期望能在短時間內，求出一近似最佳解的路徑。研究目的之分述如下：

1. 針對印刷電路板上旅行者推銷員問題，

以集群分析方法將其有效的分群，以期得到降低 NP-Complete 的解題難度。

2. 使用最佳化方法求解分群後各子集合內的旅行者推銷員問題，並尋找有效連結各分群之方法，使其可在一較短時間內，得到原 NP-Complete 解題難度的一個可行解。

3. 比較分群前後，最佳化方法求解時間的差異性。

1.1 文獻探討

求解旅行者推銷員問題的文獻最早出現在 19 世紀初，而名稱的確定則是在 1931 年。由此可以看出此問題已被研究許久，相信在更早期 TSP 便是一人們所常面對的應用問題。發展至今，已有許多求解 TSP 的相關方法。從早期的分支界線法、動態規劃法，到近幾年的啟發式解法。其中包括蒙地卡羅演算法 (Monte Carlo)、模擬退火法 (Simulated Annealing)、基因演算法 (Genetic Algorithm)、禁忌搜尋法 (Tabu Search)、螞蟻演算法 (Ant Algorithm)、類神經網路 (Neural Networks) 以及近幾年發展的粒子群最佳化演算法 (Particle Swarm Optimization) 等等搜尋演算法。由於本研究目的是希望能夠快速得到一印刷電路板上之大型旅行者推銷員問題的近似最佳解，所以我們必須選擇全域搜尋能力較強的演算法，在這裡使用基因演算法作為搜尋之演算法。我們在下面將簡單介紹基因演算法求解 TSP 方法與近幾年發展出的粒子群最佳化演算法求解 TSP。

基因演算法 (Genetic Algorithm, GA) 是由學者 John Holland 於 1975 年所提出之屬於隨機的 (Stochastic) 最佳化搜尋技術。其主要概念是以自我複製 (Self-Reproducing) 理論為基礎並輔以達爾文的進化論--「物競天擇，適者生存」而發展出之搜尋法則。在演算法理論中，每個物種在某個生存環境中彼此相互競爭、淘汰，只有適應性強到足以適應環境之物種才得

以存活及繁衍；此些物種透過複製、交配、突變等演化方式產生下一代的物種，如此反覆進行，最終即出現適應性最強大的物種。在求解問題中，傳統的演算法只以單一點做搜尋；然而遺傳演算法則將此問題之解以基因染色體型態做編碼之呈現，如此即可同時使用許多解做搜尋以進行最佳解的搜尋。憑藉著此解擁有之自然進化程序，求解空間中之解會互相競爭，好的解被複製並將其基因重新組合產生新的解，而較差之解則會被淘汰。換句話說，也就是對一問題的候選解（母代）做適應性函數的評估，評估出之較好的解則挑選進行配對，進而經過交配及突變產生新的候選解（子代），此新的候選解即為繼承母代中部份特質之子代解，如此反覆交配育種而產生更新的候選解，直到出現近似解或是最佳解為止。經由此類似自然界演化的搜尋過程，通常可以找到近似之最佳解，甚至是求解空間中之最佳解。主要是以操作基因染色體來進行演化，在反覆演化過程中可看成在求解空間中做系統化的多維空間搜尋；其主要特點有(1)求解搜尋方式為以母體大小的數量做全體多點平行式搜尋而非單點的循序式搜尋；(2)在自然進化過程中只須依靠適應值資訊即可做進化；(3)演算法中的轉移規則為隨機性而非決定性。基因演算法即包含以下幾個組成要素：(1)控制參數；要控制母體大小、交配率以及突變率。(2)編碼（Encoding）與解碼（Decoding）；適合 TSP 這類排列組合最佳化的編碼方式為符號編碼。(3)適應性函數（Fitness Function）；用以評估染色體之優劣。(4)複製（Reproduction）；此屬於物競天擇、適者生存的精神，適應性函數越優者被挑選的機會越大。(5)交配（Crossover）；此為基因演算法搜尋解的方式，其方法種類眾多。關於求解 TSP 的交配方式有 **Goldberg** [6] 提出的 Partially-Mapped Operator (PMX)，以及 **Oliver**[14] 提出的 Cycle Operator (CX)。還有 **Davis**[11] 提出的 Order Operator (OX)，這也是本研究所使用的交配方式(6)突變（Mutation）；此為用來突破區域最佳解之方法，當母體一致性過高時，希望由突變造成基因排列上的變異來達到突破搜尋的窘境。(7)結束規則（Stopping Rule）；在執行演算法之前必須先預先設定停止準則，當基因演算法演算達到所設定的停止準則時，即終止演化之循環。

其他還有一些可增加於上面演算法搜尋效率之輔助方法，例如給予啟發式初始解。在

2003 年 **Mulder**[13] 提出對於求解大型旅行者推銷員問題，結合類神經分類法（共振適應理論）與傳統區域搜尋法，將會有明顯地提升求解速度，但同時也會較容易陷入區域最佳解。在 1976 年 **Grossberg**[8] 提出了「適應共振理論（adaptive resonance theory, ART）」，是一兼具可塑性與穩定性之網路。可隨時接收新的圖樣做學習，而不用洗去先前的學習保持其穩定性，主要可用在二元值圖樣辨識。在 1991 年 **Carpenter**[5] 導入模糊的概念，使其從二元擴展至 $[0, 1]$ 之間的模糊集合，也就是模糊適應共振理論（Fuzzy ART）。

2. 研究方法

本研究流程為先從 TSPLIB 中挑選出歸類為印刷電路板且距離計算方式為使用二維歐式距離（Euclidean 2D distance）的例題，作為測試對象。接著分三步驟進行求解：

- (1) 藉由模糊適應共振理論（Fuzzy-ART）進行分群，以達到降低 NP-complete 的複雜度。並且使用一類似 KNN 分類器手法，進行二次分群，希望能得到增強群聚性的效果。
- (2) 計算各群重心後使用基因演算法求得連結之順序，準備於回復原求解難度之問題時使用。
- (3) 運用基因演算法求解分群後各子集合內的旅行者推銷員問題。求解完各子集合後將各群按照步驟(2)方式作合理的連結，以得到一原節點數量大小旅行者推銷員問題的可行解，再令其為一基因演算法之初始解並再投入基因演算法求解。

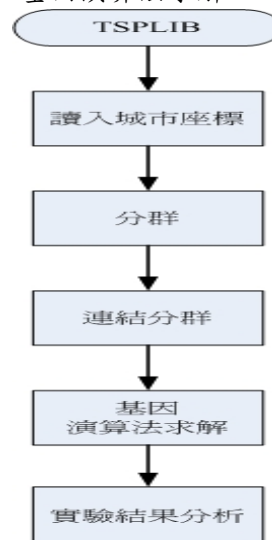


圖 1 研究流程圖

本研究流程如圖 1，將於下面幾節一一的做說明。

2.1 模糊適應共振理論

在 1991 年 Carpenter、Grossberg 和 Rosen 將 ART 網路導入模糊的概念，使其從二元擴展至 [0, 1] 之間的模糊集合，發展出模糊適應共振理論 (Fuzzy ART)。雖然主要應用範圍是在圖形辨識上，但本研究仍挑選此一方法作為分群手法。是由於本研究需應用之分群手法必須是非監督式，要兼具可塑性與適應性，使其能學習新的圖樣而不洗去舊有的學習，以符合印刷電路板上之旅行者推銷員問題的特殊圖樣。

Fuzzy ART 需要有三個參數。一為挑選參數 α ，須大於零但是不宜過大或過小，用於計算挑選函數 (choice function) 之匹配值。其算式如(1)式：

$$T_j = \frac{\sum_{i=1}^{2D} \min(\bar{I}_i, \hat{\omega}_{ji})}{\alpha + \sum_{i=1}^{2D} \hat{\omega}_{ji}}, j = 1, \dots, J. \quad (1)$$

$$I = [I_1, \dots, I_D] \quad (2)$$

$$I^c = [1 - I_1, \dots, 1 - I_D] \quad (3)$$

$$\bar{I} = (I, I^c) = [I_1, \dots, I_D, I_1^c, \dots, I_D^c] \quad (4)$$

其中(2)式、(3)式及(4)式為互補編碼，D 為輸入資料之維度，為該筆資料到第 j 個神經元的權重。第二個參數為學習速率 β ，必須介於 0 到 1 之間，其值與網路修改之幅度呈正相關，當網路判定此輸入資料為以學習過之圖形時，用於修正權重值。如(5)式：

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{J_i}^{(new)} &= (1 - \beta) \hat{\omega}_{J_i}^{(old)} \\ &+ \beta \min(\bar{I}_i, \hat{\omega}_{J_i}^{(old)}), i = 1, \dots, 2D \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\hat{\omega}_{J_i}^{(old)}$ 是學習之前的權重， $\hat{\omega}_{J_i}^{(new)}$ 是學習之後的權重。最後一個參數為警戒值 ρ (Vigilance)，是影響分群數量大小的關鍵，其值越大表示越不容易通過警戒值測試，被網路判定為新事物的情況也就越多。而要做警戒值測試的神經元為挑選函數值 T_j 最大的神經元，計算其相似值函數 (match function) 後進行警戒值測試。相似值函數公式如(6)式。網路圖架構如圖 2，由下而上之虛線箭頭為匹配值，由上而下之實線箭頭為相似值。警戒值測試即為

比較 S 與 ρ 之大小。

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{2D} \min(\bar{I}_i, \hat{\omega}_{J_i})}{D} \quad (6)$$

2.2 二次分群

本研究將使用一二次分群方法，將 Fuzzy ART 分群結果，加以修正以強化其群聚性。是由 K 近鄰 (K Nearest Neighbor, KNN) 分類法變形而來。K 近鄰分類法是從已分類的訓練樣本中，找出 k 個最接近欲分類樣本 x_j 之資料，再將 x_j 歸類為此 k 筆資料中樣本數最多的群體。K 近鄰分類法有訓練與測試兩個階段；訓練階段裡訓練資料為向量 (n 個維度) 且需將其標明所屬之群體；測試階段則是將尚未標明所屬群體的測試資料，找出 K 個最接近之資料後，列出各群體在此 K 筆資料中所擁有個數量，再將該測試資料歸類為數量最多的群體。如果有兩個以上的群體在 K 筆資料中擁有的最大數量相同，則視為平手 (所以通常 K 值設定為奇數)。

在本研究中，先計算出各群內每一節點與其最近的節點之間的距離，接著統計出該群內此最近節點距離之眾數，作為一判定該節點與其他節點位置是否夠靠近的標準，如(7)式：

$$\min_d_i = \min \sqrt{(C_{ix} - C_{jx})^2 + (C_{iy} - C_{jy})^2} \quad (7)$$

$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, i \neq j$

N 為群內節點數， C_{ix} 與 C_{jx} 為節點 i 和節點 j 的 X 座標， C_{iy} 與 C_{jy} 為節點 i 和節點 j 的 Y 座標。在集合 $\min_d_i, i = 1, \dots, N$ 中，統計出其眾數，即為判別訓練樣本與測試樣本之標準值。如圖 2 中，節點 A 因在標準距離內有 B 及 C 兩個節點，所以判定群聚性夠強，視為訓練資料；節點 D 只有一鄰近節點 E，即判定為群聚性不足，視為測試資料；G 節點則找不到鄰近節點，同理判定為測試資料。

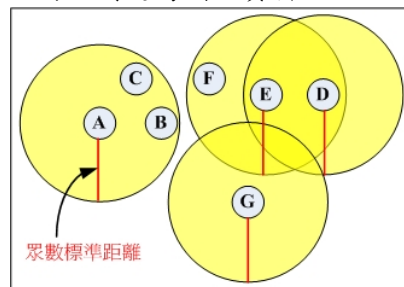


圖 2 近鄰示意圖

KNN 分類法在第一個訓練階段中，利用此一標準值對群內每一節點做測試，若能在標準值內找出兩個節點，則判定其群聚性夠強，視為訓練資料。反之則判定其群聚性不夠，視為測試資料。以及單一群體中若僅有兩個節點為一群之情形，也將視該群為測試資料。

在第二階段中，使用 $K=1$ 對測試資料作分類。也就是說，對於已判定為群聚性不夠強的節點，令其重新尋找最靠近的群體，做為應歸屬之群體。二次分群之流程如圖 3 所示：

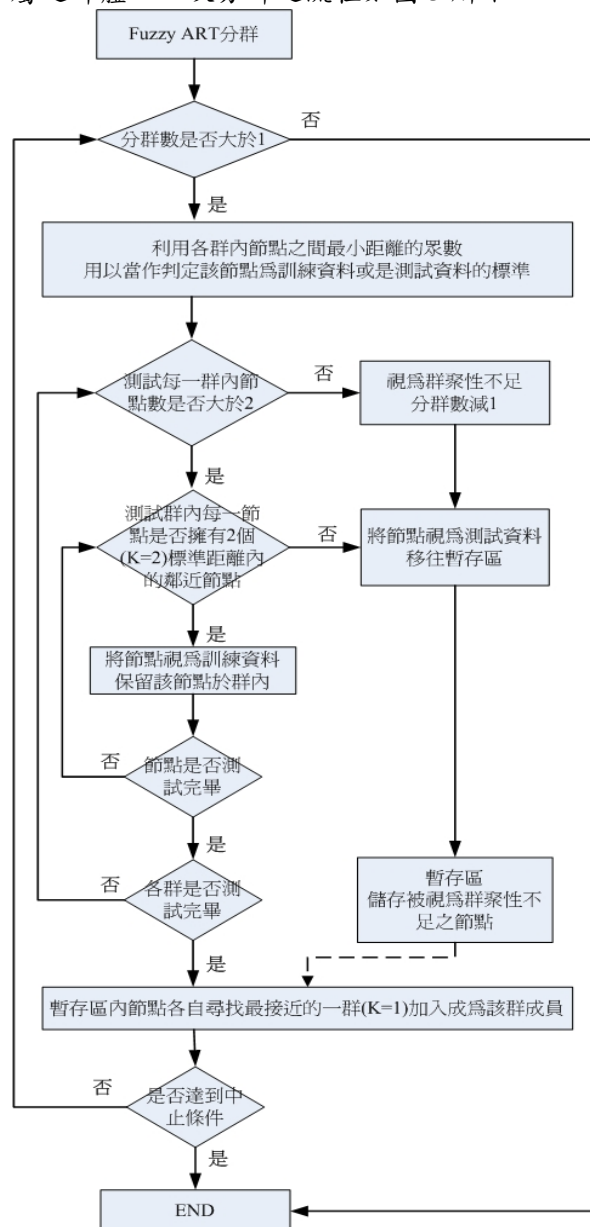


圖 3 近鄰示意圖

2.3 連結分群

在經過上述分群方法後，原本的旅行者推銷員問題已被拆成數個，但若沒有將分群後解

題之結果做有效的連結就沒有意義。最終目的仍然是要得到一個原本旅行者推銷員問題解題難度的一個可行解。

在本研究中所使用的連結方法，首先為計算各群的幾何重心，以此作為一節點的座標，再使用本研究中所提到的最佳化方法，以期先求出一各群之間幾何重心的漢彌爾頓循環。如圖 4 中紅色圓形即代表重心；紅色虛線代表由最佳化方法所得之路徑，作為各群連結的順序；其他較小的圓形代表旅行者推銷員問題中的節點，不同顏色代表分屬不同群體。而(8)式、(9)式， Tx_i 與 Ty_i 分別為第 i 群的重心 x 座標與 y 座標， Cx_{ij} 與 Cy_{ij} 分別為第 i 群裡的第 j 個節點的 x 與 y 座標， O_i 為第 i 群的節點數量， $i = 1, \dots, M$ ， M 為分群數量。

$$Tx_i = \frac{\sum_{j=1}^{O_i} Cx_{ij}}{O_i}, j = 1, \dots, O_i \quad (8)$$

$$Ty_i = \frac{\sum_{j=1}^{O_i} Cy_{ij}}{O_i}, j = 1, \dots, O_i \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{(Cx_{ij} - Cx_{(i+1)j})^2 + (Cy_{ij} - Cy_{(i+1)j})^2}), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, O_i \quad (10)$$

接著，以此一循環做順序，找出兩群間最靠近的兩個節點，當作此兩群的連接點。如(10)式，最後會得到第 i 群跟第 $i+1$ 群間最接近的兩個節點，且各群內使用最佳化方法求解時不改變連接節點的順序。也是令其成為求群內解時之第一個節點與最後一個節點。如圖 3.8 中紅色橢圓所圈起來之兩節點，是為兩群之間的連接站。

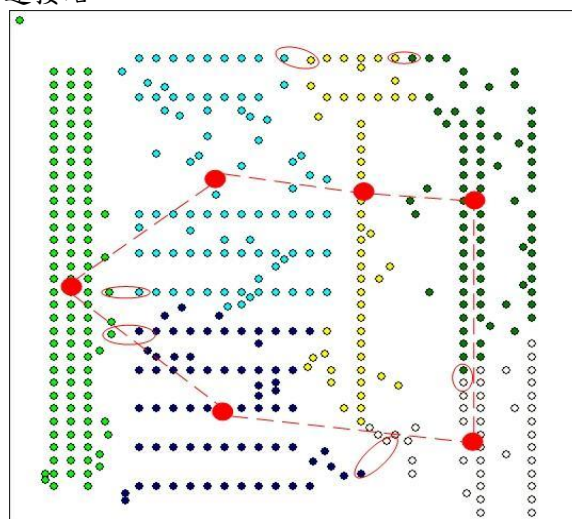


圖 4 連結分群示意圖

2.4 基因演算法

在下面將分述基因演算法求解旅行者推銷員問題於本研究所使用之各流程內容：

(1)編碼：於先前提過基因演算法適合求解 TSP 的染色體編碼方式是為符號編碼。給每一個節點一個符號作代表，最簡單的方式就是以整數作為代表節點之符號。以圖 5 做一簡單例子，節點數量為 10，編碼為 0 到 9。

0	2	1	8	5	3	7	4	6	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

圖 5 連結分群示意圖

(2)母體初始化：要進行基因演算法必須先依參數設定中的母體數量來產生第一代母體的數量，而產生一個好的初始解將有助於加快求解效率。在旅行者推銷員問題裡，貪婪法 (Greedy algorithms) 為最直覺性的啟發式解法。即是找出現階段最接近之節點，作為下一目標節點，直到拜訪完所有節點後並回到起點節點即結束，也就是每一步都是選擇當時最佳的目標。

(3)評估：在此流程所要進行的運算，也就是達爾文所提出的「物競天擇，適者生存」。由每一代所有染色體各自的適應性函數 (Fitness) 做評估，留下較佳的染色體並且淘汰較差者，用新產生的子代染色體作補充。就旅行者推銷員問題而言，適應性函數即為旅行的路徑長度，其值越小者適應性函數評估越佳。

(4)複製：本研究利用輪盤複製法隨機選取母體中的染色體進行複製，其主要原理為按照每個基因的適應函數值來分割輪盤上的面積，適應函數值越佳者，所佔有的面積越大。反之，則越小。之後，再拿一隻飛鏢射向輪盤，所射中的基因就進入到交配池中。

(5)交配：如前所述，在本研究中所使用的交配法為 OX 法 (Order Operator)，是 Davis 在 1985 年所提出，主要是應用於各種排列問題上，著重於保存母代染色體上各字元的順序關係。其操作方法由圖 6 做說明。

母代：	交配點1	交配點2
P_1	(9 8 4 5 6 7 1 3 2 0)	
P_2	(8 7 1 2 3 0 9 5 4 6)	
子代：	交配點1	交配點2
O_1	(x x x 2 3 0 9 x x x), P_1 順序：	3, 2, 0, 9, 8, 4, 5, 6, 7, 1
O_2	(x x x 5 6 7 1 x x x), P_2 順序：	5, 4, 6, 8, 7, 1, 2, 3, 0, 9
從交配點2開始按照順序排入子代，相同城市則不再排入，得到新子代為：		
O_1	(6 7 1 2 3 0 9 8 4 5)	
O_2	(3 0 9 5 6 7 1 4 8 2)	

圖 6 OX 法交配示意圖

(6)突變：在此本研究所選擇的為反轉突變，先

隨機選擇兩切點，然後將兩切點間的字元順序，加以反轉即可，如圖 7 所示。

	突變點1	突變點2
突變前：	P=(1 3 5 2 4 6 7 8 0)	
突變後：	P=(1 3 5 7 6 4 2 8 0)	

圖 7 反轉突變示意圖

(7)停止條件：常見的停止條件有三種，其一為達到預先設立之適應值函數或目標函數值。另一種為滿足最大之連續失敗次數，即為無法連續進化為更優解之循環世代次數。以及本研究所使用的達到預先設定之最大演化循環步驟則停止。

3.實驗結果

根據第二節所述之研究方法及理論編寫程式，以驗證本研究所提的使用 Fuzzy-ART 分群減少 TSP 求解時間之理論架構是否可行。實驗設備為 Pentium IV-3.2G 之個人電腦，以 Borland C++ Builder 6.0 作為程式編輯的工具，建構出視窗應用程式。測試對象為 TSPLIB 中的 PCB442 與 PCB1173 兩個例題，其路徑總長各為 50778 與 56892。將在下面作兩階段的比較；第一階段為 Fuzzy-ART 分群是否進行二次分群群聚性效果上的比較；第二階段則對兩例題分別進行是否分群對於求解時間上的比較。

3.1 二次分群結果

首先我們進行 Fuzzy-ART 分群效果之實驗，由於是非監督式方法，所以並無一客觀數值可做比較，改採人工判定。實驗參數之設定如下，挑選參數 α 固定為 0.5，學習速率 β 使用 0.05 到 0.6，警戒值 ρ 則為 0.35 到 0.70。一共可得 2016 個分群結果，其中 39 種為主觀判定較優秀。舉例說明圖 8 為僅使用 Fuzzy-ART 分群之圖形，其參數為 $\alpha=0.5$, $\beta=0.1$, $\rho=0.63$ ，分成 8 群。圖 9 則為同一參數有進行二次分群之圖形，分成 6 群。由圖形可以觀察出，僅經由 Fuzzy-ART 分群之圖形，容易有一些距離群聚中心較遠的節點產生。而有進行二次分群方法之圖形，其群聚性較強，沒有離群聚中心較遠的單一節點，且能消去節點數較少之群體。這樣能使得在進行基因演算法時，省去運算距離太遠的節點，達到增加求解效率的目標。

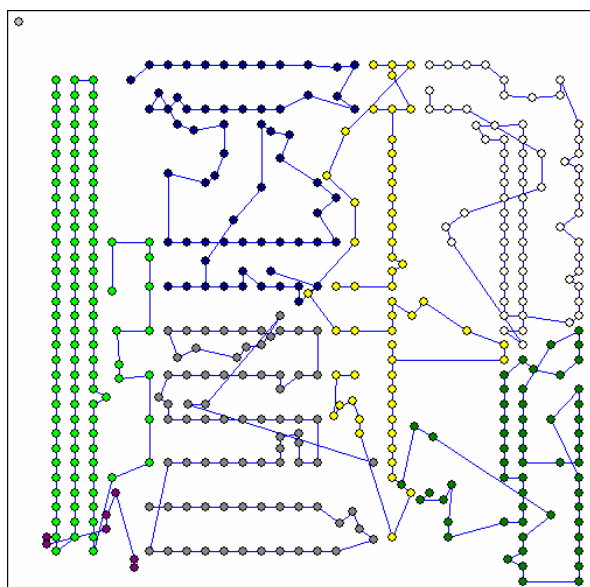


圖 8 Fuzzy ART 初步實驗圖

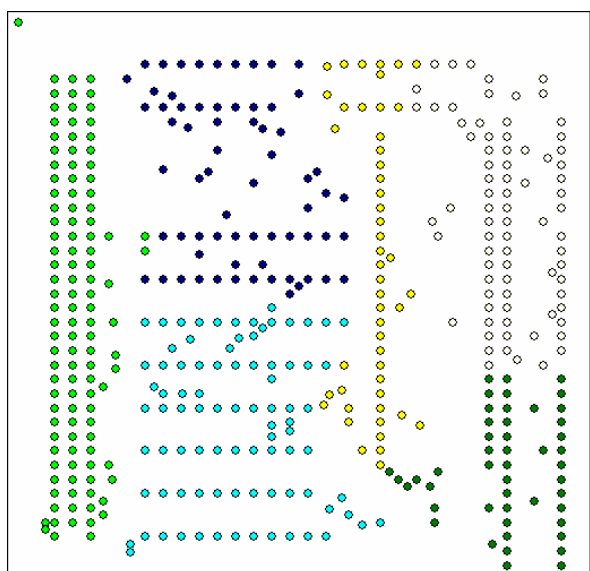


圖 9 二次分群實驗結果

3.2 基因演算法求解結果

針對 PCB442 與 PCB1173 兩例題進行的實驗將固定基因演算法的參數，其設定之母體數為 400、交配率 30%、突變率 2% 以及世代數為 1000。分別進行 30 次之實驗，比較是否分群對於求解時間與求解效果之影響。誤差公式如 (11) 式。實驗結果成本為基因演算法求解之結果，已知最佳解成本為 TSPLIB 中公佈之目前國際上解出的最佳解成本。而 Fuzzy-ART 之參數採用 $\alpha=0.5$, $\beta=0.1$, $\rho=0.60$ 。

$$\frac{\text{實驗結果成本} - \text{已知最佳解成本}}{\text{已知最佳解成本}} \times 100\% \quad (11)$$

表 1 實驗結果表

例題	分群	平均路徑長	平均求解時間(s)	平均誤差(%)
PCB 442	否	57966.70	42.00	14.16
	是	57819.72	36.67	13.87
PCB 1173	否	69234.77	218.77	21.70
	是	67846.85	109.21	19.26

由表 1 可知，有無分群對於求解上，並無顯著的差異性，但求解時間之差異性就較為顯著。且 TSP 節點數越大，對於時間的影響越大。

4. 結論

經由實驗結果，可以為本研究所提的 Fuzzy-ART 分群降低 TSP 求解難度，以縮短基因演算法求解時間的論點，做一合理之證明。並可依照此分群的思考方向，嘗試更有效率之分群以及連結子集合手法。且未來可配合其他最佳化方法，嘗試將求解時間縮得更短，期望能符合實務上的應用。

參考文獻

- [1] 林昇輔、洪成安，*神經網路入門與圖樣辨識*，2002。
- [2] 葉怡成，*類神經網路模式應用與實作*，2002。
- [3] 劉文良，*顧客關係管理思維與技術*，2005。
- [4] 蔡宗翰譯，*演算法 使用 C++ 虛擬碼*，2004。
- [5] Carpenter, G.A., Grossberg, S., Rosen, D.B., *Fuzzy ART: Fast stable learning and categorization of analog patterns by an adaptive resonance system*, Neural Networks, 4, 759-771, 1991.
- [6] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- [7] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, and D.B. Shmoys, *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons Ltd, 1985.
- [8] Grossberg, S., *Adaptive pattern classification and universal recoding: I. Parallel development and coding of neural feature detectors*, Biological Cybernetics, 1976.

- [9] G. Winter, J. Periaux, M. Galan and P.Cuesta, ***Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science***, John Wiley & Sons Ltd., 1995.
- [10] Guturu Parthasarathy, B. N. Chatterji, ***A Class of New KNN Methods for Low Sample Problems***, IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society, Vol. 20, Issue 3, pp.715 – 718, 1990.
- [11] L. Davis, ***HANDBOOK OF GENETIC ALGORITHMS***, Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [12] M. Mitchell, ***AN INTRODUCTION TO GENETIC ALGORITHMS***, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [13] Mulder, S.A. Wunsch, D.C., ***Using adaptive resonance theory and local optimization to divide and conquer large scale traveling salesman problems***, Neural Networks, Vol. 2, 20-24, pp.1408- 1411, 2003.
- [14] Oliver I.M., Smith D.J., Holland J.R.C., ***A Study of Permutation Crossover Operators on the Traveling Salesman Problem***, In Proceedings of the Second International Conference on Geiietic Algorithms, pp. 224 - 230, 1987
- [15] Richard E. Neapolitan and Kumarss Naimipour, ***FOUNDATIONS OF ALGORITHMS***, D. C. Heath and Company, 1996.
- [16] Zbigniew Michalewicz, ***Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs Third, Revised and Extended Edition***, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [17] Zbigniew Michalewicz, David B. Fogel, ***How to solve It: Modern Heuristics***, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.