

結合不同貝氏網路之診斷測驗及補救教學系統研發 —以國小數學領域「代數」為例

張見銘

劉湘川

郭伯臣

台中亞洲大學資訊工程研究所

台中亞洲大學資訊工程研究所

台中亞洲大學資訊工程研究所

jm1682001@hotmail.com

lhc@asia.edu.tw

kbc@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究將以國小數學領域六年級代數能力指標(6-a-01、6-a-02、6-a-03)為例，透過貝氏網路理論診斷能力指標相關子技能及錯誤類型，利用動態決斷值提升單一貝氏網路在靜態決斷值下的辨識效果；再進一步利用六種演算法融合多重貝氏網路結構，提高結合後的辨識效果，作為診斷本研究範圍學生所需能力及錯誤概念更精確的工具，最後結合補救教學動畫，建置一套精準、快速的診斷測驗、個別化的補救教學系統。

關鍵詞：多重貝氏網路、單一貝氏網路、代數、診斷測驗、補救教學

1. 前言

身處資訊科技化的時代，資訊融入教學已是時勢所趨，也有相當多的研究指出電腦輔助教學具有相當的成效，但多數研究屬於只有補救教學的半套的系統，如果要稱為完整的教學系統，尚需包含電腦診斷測驗，讓學生在測驗時能即時診斷出學生所具備的能力及所犯的錯誤類型，由電腦自動適性補救教學。貝氏網路應用在教育測驗診斷上，近一兩年已有大幅進展，許多研究也都指出其在診斷上有相當高的精準度；但綜合之前相關研究發現，所有的貝氏網路模組都是由單一專家所決定，導致雖有不同專家決定不同的貝氏網路，但也都符合該領域知識的情況。

雖然可以利用辨識率來決定哪個貝氏網

路結構較佳[2, 4]，但是如果多個貝氏網路間的差異不大的話，這樣的方法是無法明確的決定出哪一個貝氏網路是較佳的。所以，謝典佑提出了「多重貝氏網路」的概念[6]，此概念為獲取多個貝氏網路中較優勢的部份，利用六種不同的演算法融合不同的貝氏網路，以期提高辨識效果。由於該篇研究範圍只以國民小學三年級數與量之相關能力指標為例，本研究將利用相同方法探討是否能夠應用到本研究範圍。

1.2 論文組織

本篇論文共分為五章，其章節安排如下：首先在第一章的開始闡述了本論文的研究背景、動機、目的；第二章介紹貝氏網路以做為該篇研究的先備知識；第三章介紹貝氏網路在教育上的應用；第四章介紹本研究的實驗過程、單一貝氏網路模組、各個融合演算法、多重貝氏網路模組及其之間的比較；第五章將對該研究作出結論以及精進做法。

2. 貝氏網路

貝氏定理 (Bayesian Rule)：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

當變數 A 確定有影響變數 B 的因果關係時，從 A 到 B 將產生一個相依的連結邊。此時，節點 A 稱為節點 B 的父節點，而節點 B 稱為節

點 A 的子節點。

- 條件機率 $P(B|A)$ 表示給予 A 的條件之下，B 發生的機率。
- 機率 $P(A)$ 和機率 $P(B)$ 表示 A 和 B 各自發生的機率。
- $P(B|A)$ ， $P(B)$ 和 $P(A)$ 在研究中是先用訓練的資料求得。

貝氏網路是一個以條件機率 (Conditional Probability) 為基礎所建構出來的具方向性且非循環有向圖 (Directed Acyclic Graph)，如圖 1 所示。圖中的節點 (node) 表示一個事件 (event)，節點之間的連線 (link) 則表示事件的因果關係，其影響程度的強弱藉由條件機率來表達；該網路中之節點表示隨機變數，而連結線用來表示兩個變數間的關聯或因果關係。換言之，這個有向圖是這些變數之聯合機率分佈的分解表示法 [1]。

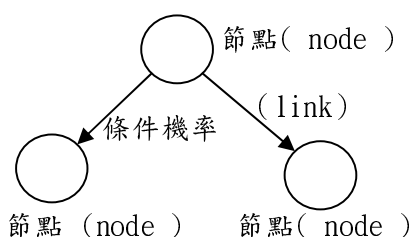


圖 1 貝氏網路非循環的有向圖 (directed acyclic graphs, 簡稱 DAGs)

貝氏網路的用途很多，可以達到預測、溝通、訓練及提供更好的選擇來決定決策做法；且貝氏網路具有可以輕易地處理不完整的資料的特性，它利用表示相依關係的知識表示法及允許因果關係的學習和透過貝氏統計的方法，可以做到將領域知識與資料之間做結合的優點。

圖 2 顯示一個簡單的網球發球貝氏網路，這個貝氏網路的主要功能是判斷影響網球員發球好壞的原因，並表示出這個問題變數之間的關係。反過來說，我們可以藉由發球 (S) 的優劣結果，來診斷網球員所具備之協調性 (C) 及身高 (H)，其所發生的機率，貝氏

網路中節點所代表的意義用表 1 來表示。

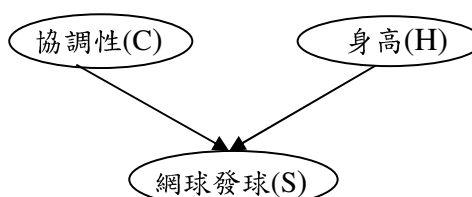


圖 2 網球發球好壞貝氏網路

表 1 貝氏網路中各節點所代表的意義

協調性		身高			發球	
差	佳	高	中等	矮	差	優
C_1	C_2	H_1	H_2	H_3	S_1	S_2

假設表 2 為圖 2 網球發球各節點的先驗機率分布表。

表 2 發球先驗機率分布表

C	H	S_1	S_2
$C_1=0.4$	$H_1=0.3$	0.7	0.3
	$H_2=0.4$	0.8	0.2
	$H_3=0.3$	0.9	0.1
$C_2=0.6$	$H_1=0.5$	0.1	0.9
	$H_2=0.3$	0.2	0.8
	$H_3=0.2$	0.7	0.3

依貝氏網路結構所獲得的聯合機率分布函數如下所示：

$$P(C, H, S) = P(C)P(H)P(S|C, H)$$

$$P(S_1) = \sum_{C, H} P(C, H, S_1) = \sum_{C, H} P(C)P(H)P(S_1|C, H) = 0.47$$

用以診斷發球差受協調性影響的步驟：

$$P(C_1, S_1) = \sum_H P(C_1, H, S_1) = \sum_H P(C_1)P(H)P(S_1|C_1, H) = 0.32$$

$$P(C_2, S_1) = \sum_H P(C_2, H, S_1) = \sum_H P(C_2)P(H)P(S_1|C_2, H) = 0.15$$

$$P(C_1|S_1) = \frac{P(C_1, S_1)}{P(S_1)} = \frac{0.32}{0.47} = 0.68$$

$$P(C_2|S_1) = \frac{P(C_2, S_1)}{P(S_1)} = \frac{0.15}{0.47} = 0.32$$

所以，影響發球差之協調性 (C_1, C_2) 的信賴度 $= (0.68, 0.32)$

用以診斷發球差受身高影響的步驟：

$$P(H_1, S_1) = \sum_C P(C, H_1, S_1) = \sum_C P(C)P(H_1)P(S_1|C, H_1) = 0.114$$

$$P(H_2, S_1) = \sum_C P(C, H_2, S_1) = \sum_C P(C)P(H_2)P(S_1|C, H_2) = 0.164$$

$$P(H_3, S_1) = \sum_C P(C, H_3, S_1) = \sum_C P(C)P(H_3)P(S_1|C, H_3) = 0.192$$

$$P(H_1|S_1) = \frac{P(H_1, S_1)}{P(S_1)} = \frac{0.114}{0.47} = 0.243$$

$$P(H_2|S_1) = \frac{P(H_2, S_1)}{P(S_1)} = \frac{0.164}{0.47} = 0.349$$

$$P(H_3|S_1) = \frac{P(H_3, S_1)}{P(S_1)} = \frac{0.192}{0.47} = 0.408$$

所以，影響發球差之身高 (H_1, H_2, H_3) 的信賴度 $= (0.243, 0.349, 0.408)$ 。

從上面的協調性 (C) 、身高 (H) 信賴值分析，便可以診斷發球差受何種因素的影響比重。同樣的方法亦可以診斷發球好主要受何種因素的影響。

3. 貝氏網路在教育上的應用

Mislevy 將其應用在認知診斷中，其基本概念為「定義一個學生模式的空間以及一可觀察結果的空間，透過一組變項及變項間的關係簡化地描述學生的知識、技能與策略的特性」。建立此架構後，根據理論與資料，我們可以事先假定在此空間中不同模式的學生解題與答題的機率，而後再進一步透過機率理論的機制，從學生行為的觀測值推論出學生模式中參數的可能值[3]。

國內已有許多研究利用能力指標、子技能、錯誤類型及試題代表節點，節點之間用有向邊連結，有連結表示條件相依，沒連結則稱為條件獨立的方式建立單一貝氏網路做為診

斷學生數學能力及錯誤類型，但單一網路欠缺的是：無法消彌各個專家主觀意識以及融合各專家結構的優勢。其中只有謝典佑提出融合多重貝氏網路的概念，來進一步解決此類問題。

4. 本研究架構

本研究範圍為九年一貫課程正式綱要-數學學習領域中，六年級代數能力指標 6-a-01~6-a-3，因課程在六年級下學期後半段，為配合研究時間，所以預試樣本為國中生一年級，總共收集了彰化市彰安國中、信義國中小國中部及福興國中各三個班，共 279 位學生的測驗結果資料來作為研究樣本。之後進行由專家定義的五個單一貝氏網路模組的建立與比較相互之間其辨識率的不同；以及藉由這五個貝氏網路模組在不同融合演算法下，比較其辨識率提升的地方。

4.1 單一貝氏網路

4.1.1 貝氏網路結構定義

本研究先參考相關文獻及高年級十位數學老師的意見，探討本研究範圍代數能力指標所需的子技能及常見的錯誤類型，做為後續試題編製的依據，能力指標、子技能及錯誤類型的對照表整理如表 3 至表 5。

表 3 能力指標編號對照表

能力指標編號	能力指標
L1	能理解等量公理
L2	能使用未知數符號，將具體情境中的問題列成兩步驟的算式題，並嘗試解題及驗算其解
L3	能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性

表 4 子技能編號對照表

子技能 編號	子技能
S1	能理解等式左右同加、減、乘、除一數時(除數不為 0)，等式仍然成立的概念
S2	能解決使用未知數符號所列出的兩步驟算式
S3	能解決使用未知數符號所列出的減數為未知數兩步驟算式
S4	能解決使用未知數符號所列出的除數為未知數兩步驟算式
S5	能解決使用未知數符號所列出的除數為分數兩步驟算式
S6	會做乘法對加法的分配律
S7	會做同一未知符號之間的加減運算
S8	能使用未知數符號，將具體情境中的問題列成兩步驟的算式題
S9	能使用未知數符號，將包含常用的數量關係問題列出恰當的算式
S10	會驗算其解

表 5 錯誤類型編號對照表

錯誤類型 編號	錯誤類型
B1	不能理解等式左右同加、減、乘、除一數時(除數不為 0)，等式仍然成立的概念
B2	移項時發生加減錯誤
B3	減數為未知數兩步驟算式移項時發生加減錯誤
B4	移項時發生乘除錯誤
B5	除數為未知數兩步驟算式移項時發生乘除錯誤
B6	數字與文字符號的加減與乘混用
B7	不會先乘除後加減
B8	分數移項時發生分子、分母錯置
B9	只乘其中一數

B10	數字與符號分開運算
B11	忽略係數 1
B12	不懂題意，含未知數列式錯誤

B13	文字題不了解數量關係、題意，含未知數列式錯誤
B14	四則運算一律由左到右
B15	忽略括號

接著由研究者針對上述能力指標、子技能、錯誤類型及試題定義各節點之間的關係，也為第一個貝氏網路模組，各節點之間的關係整理如表 6 至表 8。

表 6 能力指標 6-a-01(L1)之各節點關係

子技能編號	錯誤類型編號	試題編號
S1	B1	1, 2, 3, 4

表 7 能力指標 6-a-02(L2)之各節點關係

子技能編號	錯誤類型編號	試題編號
S2	B2	5, 6, 7, 9, 10, 11
	B4	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16
	B6	5, 6, 7, 8, 17, 18
	B7	9, 10, 11, 12, 28, 29
S3	B3	8, 12
	B4	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16
S4	B5	13, 14
S5	B8	15, 16
S8	B12	21, 22, 23
S10	B14	28, 29
	B15	28, 29

表 8 能力指標 6-a-02(L3)之各節點關係

子技能 編號	錯誤類型編號	試題編號
S6	B6	5, 6, 7, 8, 17, 18
	B9	17, 18

S7	B10	19, 20
	B11	19, 20
S9	B13	24, 25, 26, 27

當貝氏網路各節點關係定義完成後，再將其配合有向邊組成一個非循環有向圖(DAG)模式，以呈現出相對應的貝氏網路模組(如圖3)。

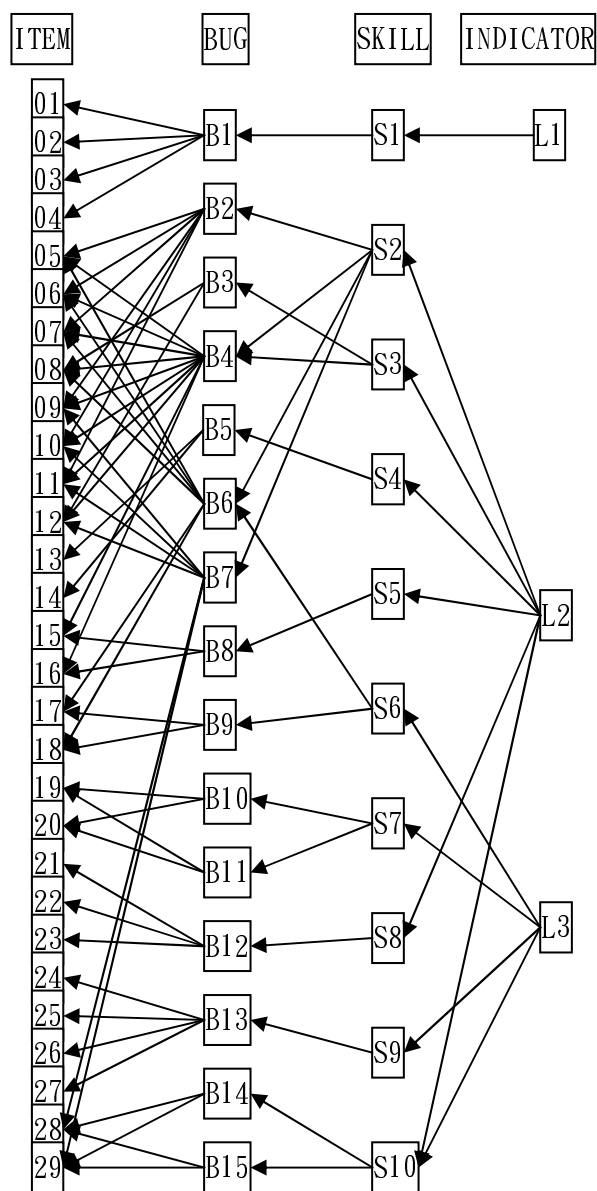


圖 3 專家一貝氏網路結構圖

另外再請數學領域裡不同的專家定出四種不同的貝氏網路模組，差異如表 9、10、11，專家五則是累加專家二、三、四的差異而成。

表 9 專家二與專家一貝氏網路差異對照表

父節點	增加之子節點
B1	ITEM05~ITEM16
B2	B3
B4	B5
S2	B3
	B5
	B8

表 10 專家三與專家一貝氏網路差異對照表

父節點	增加之子節點
L1	S2
	S3
	S4
	S5
S2	S3
	S4
	S5
S8	S9

表 11 專家四與專家一貝氏網路差異對照表

父節點	增加之子節點
B12	B13
S1	B2
	B3
	B4
	B5
L1	L2
L2	L3

4.1.2 效能評估

本研究中不同貝氏網路效能之評估準則，主要採用 5-fold cross validation 進行 SKILL 與 BUG 的平均辨識率。視該貝氏網路的證據，以推論出每位學生在其試題反應為證據的狀況下，其具備有錯誤類型、基本能力的後驗機率值為何。

4.1.3 單一貝氏網路實驗結果相互比較

利用各個貝氏網路結構及人工判斷訓練樣本是否具有錯誤類型、子技能及能力指標，分析此貝氏網路結構在靜態決斷值之辨識率，以專家一為例，如表 12。

表 12 專家一靜態決斷值之辨識率(%)

節點 編號	靜態決斷值								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
B1	97.5	98.9	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
B2	85.0	85.3	86.0	85.7	83.1	82.8	82.1	79.9	76.0
B3	73.8	81.7	86.4	86.4	87.8	88.9	87.1	85.3	83.9
B4	76.0	80.7	81.7	82.8	82.4	81.3	82.1	79.9	78.8
B5	86.4	86.7	86.7	88.1	89.6	89.6	89.2	89.6	90.7
B6	79.2	83.1	85.3	87.1	87.1	87.8	86.7	86.4	84.9
B7	81.7	84.9	84.2	85.6	86.7	86.0	85.3	81.3	76.7
B8	90.7	93.9	93.2	92.8	92.1	91.4	87.1	84.2	81.4
B9	95.0	95.7	95.3	94.6	94.6	92.8	91.0	89.6	84.2
B10	91.0	91.0	91.0	91.0	90.3	82.1	63.1	62.0	62.0
B11	95.7	95.7	95.0	95.0	93.9	89.9	87.8	82.4	57.4
B12	79.6	79.6	81.0	86.8	86.4	86.7	86.7	86.7	86.7
B13	85.0	92.9	94.6	95.0	91.4	89.3	86.8	87.8	86.4
B14	81.4	84.2	86.0	86.7	89.2	89.2	89.2	89.6	89.6
B15	82.4	81.4	82.4	83.9	82.4	85.6	87.8	87.8	88.1
L1	60.2	80.7	80.7	80.7	80.7	80.7	79.9	51.0	39.8
L2	80.6	84.6	87.8	89.9	89.6	88.5	87.5	82.5	76.0
L3	80.2	88.1	89.2	90.3	90.7	89.6	88.9	86.0	77.8
S1	83.5	83.5	83.5	83.5	83.5	83.5	83.2	47.3	42.7
S2	87.1	89.6	91.4	91.7	91.0	91.4	89.2	86.4	79.5
S3	57.7	70.9	80.3	83.1	83.1	82.8	79.6	73.5	49.1
S4	82.1	82.8	85.3	90.7	91.8	90.7	85.7	79.2	65.3
S5	80.3	88.5	96.1	97.1	98.6	97.9	95.7	93.9	82.8
S6	89.2	93.5	95.0	97.5	98.9	100.0	100.0	97.9	91.1
S7	69.5	69.5	72.0	78.1	78.4	78.5	75.6	68.8	69.2
S8	73.4	73.4	73.4	75.9	83.1	81.3	77.8	71.7	59.5
S9	86.4	87.8	86.8	89.3	91.4	95.0	94.6	92.9	85.0
S10	80.9	82.4	83.5	84.6	85.3	84.6	85.3	84.6	80.3
平均	79.4	83.1	85.0	86.7	87.4	87.2	85.7	81.7	76.4

由表 12 可看出靜態決斷值在 0.5 時，專家一的模組平均辨識率最高；而粗體字可看出各節點在不同的決斷值(動態決斷值)之下有了最高的辨識率。專家二~五亦利用相同方法做出如表 12 的靜態跟動態決斷值之辨識率，也發現相同節點的辨識率在不同專家模式中的最佳值並不相同。而表 13 發現動態決斷值之辨識率大幅提升，尤其是專家一。

表 13 單一貝氏網路於靜、動態決斷值下辨識率的比較

專家網路	靜態	動態	提升效果
一	87.4%	89.7%	2.3%
二	88.7%	89.7%	1.0%
三	88.8%	89.9%	1.1%
四	89.0%	90.1%	1.1%
五	88.9%	90.1%	1.2%

4.2 多重貝氏網路融合

4.2.1 多重辨識器結合演算法的基本概念

在圖 4 中，D1、D2、D3 為單一辨識器，D*是理想中最佳的辨識器，外圍區域是各辨識器可以辨識的區域，內圍區域是各辨識器可以辨識的最佳區域。以這樣的觀點來看，若能尋找到 D*，那該問題便有最佳的辨識效果。但在結構複雜的情況下，要尋找這個最佳的辨識器是非常的困難，所以，在這個情況下我們可以專注在尋找多個辨識器的結合，已獲得趨近於 D*的理想辨識器。

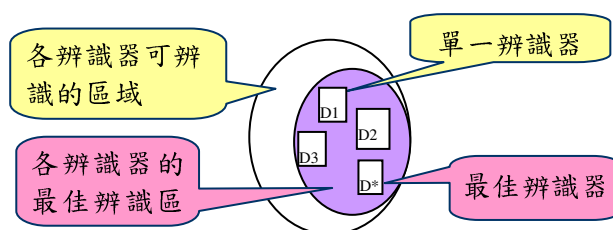


圖 4 多重辨識器結合演算法的基本概念

4.2.2 辨識器結合的流程與方法

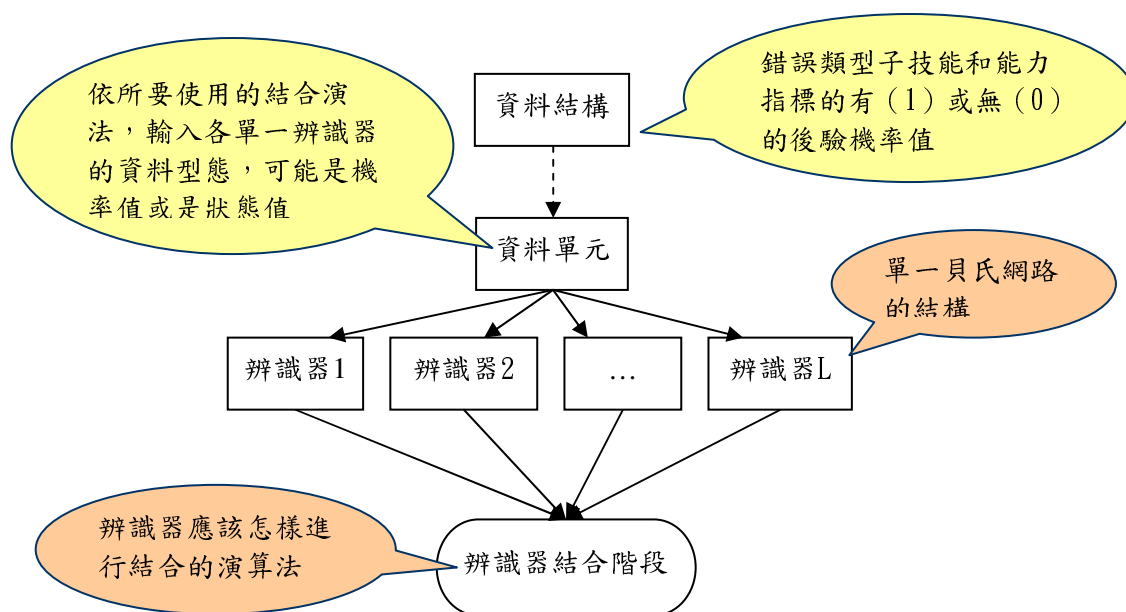


圖 5 辨識器結合的流程與方法

結合的方式採用 Kuncheva[7]提出的架構，從圖 5 來看，資料結構是指單一辨識器辨識出來的類別資料型態，以本研究而言便是錯誤類型、子技能和能力指標的後驗機率值。資料單元是依所要使用的結合演算法，輸入各單一辨識器的資料型態，可能是機率值或是狀態值。單一辨識器的部分是指辨識器的架構，以本研究而言就是指單一貝氏網路的架構。辨識器的結合方式是定義辨識器應該怎樣進行結合的演算法。由上可看出，重點在結合的方式，怎樣結合能使辨識效果的改善及突破。

4.2.4 符號定義

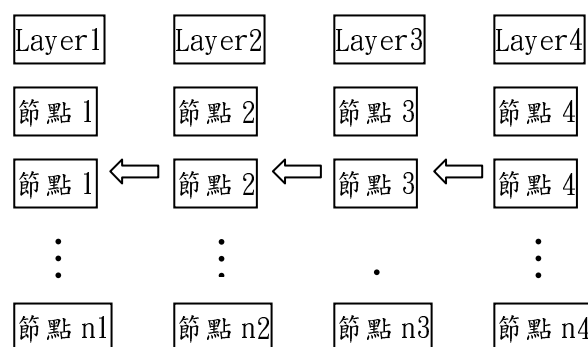


圖 7 簡易四層貝氏網路

4.2.3 辨識器的結合方式

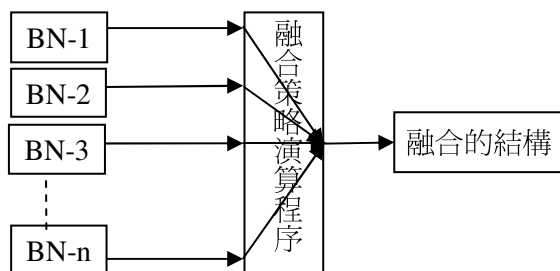


圖 6 辨識器的結合方式

$0 \leq M_{ijk} \leq 1$ ， M_{ijk} = 第 i 個單一貝氏網路結

構，第 j 層的第 k 個節點在辨識最終結果為有 (1) 的後驗機率。

$$MP_{jk} = \begin{bmatrix} M_{1jk} \\ \vdots \\ M_{ijk} \\ \vdots \\ M_{mjk} \end{bmatrix}, \quad MP_{jk} = m \text{ 組單一貝氏網路}$$

結構下辨識最終結果。

因採二元計分之故，所以必須將所求的後驗機率值換算成有(1)或無(0)的狀態值，以便進行辨識率的計算：

$$FMP_{jk} = \begin{cases} 0, f(MP_{jk}) < \varepsilon \\ 1, f(MP_{jk}) \geq \varepsilon \end{cases}, \quad FMP_{jk} = \text{最終結}$$

合後的狀態值。 $f(MP_{jk})$ = 各融合演算法下不同的辨識結果。決斷值 ε 界於0跟1之間。

4.2.5 各種貝氏網路融合法

1. Maximum 融合法

從一資料集中，取出最大值來當做最終的結果。

$$Max(MP_{jk}) = Max([M_{1jk} \cdots M_{ijk} \cdots M_{mjk}]^T)$$

$$FMP_{jk} = \begin{cases} 0, Max(MP_{jk}) < \varepsilon \\ 1, Max(MP_{jk}) \geq \varepsilon \end{cases}$$

2. Minimum 融合法

從一資料集中，取出最小值來當做最終的結果。

$$Min(MP_{jk}) = Min([M_{1jk} \cdots M_{ijk} \cdots M_{mjk}]^T)$$

$$FMP_{jk} = \begin{cases} 0, Min(MP_{jk}) < \varepsilon \\ 1, Min(MP_{jk}) \geq \varepsilon \end{cases}$$

3. Product 融合法

從一資料集中，取出各值來加以相乘，當做最終的結果。

$$product(MP_{jk}) = \prod_{i=1}^m M_{ijk}$$

$$FMP_{jk} = \begin{cases} 0, product(MP_{jk}) < \varepsilon \\ 1, product(MP_{jk}) \geq \varepsilon \end{cases}$$

4. Average 融合法

從一資料集中，取出各值來加以算出平均值，當做最終的結果。

$$average(MP_{jk}) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m M_{ijk} \right)$$

$$FMP_{jk} = \begin{cases} 0, average(MP_{jk}) < \varepsilon \\ 1, average(MP_{jk}) \geq \varepsilon \end{cases}$$

5. Majority 融合法

如現實生活中的投票選舉，採多數決同意(plurality)演算規則，先將 MP_{jk} 轉化全為有(1)或無(0)的值：

$$BMP_{jk} = \begin{bmatrix} BM_{1jk} \\ \vdots \\ BM_{ijk} \\ \vdots \\ BM_{mjk} \end{bmatrix}, \quad BM_{ijk} = \begin{cases} 0, M_{ijk} < \varepsilon \\ 1, M_{ijk} \geq \varepsilon \end{cases}$$

再算出最後辨識效果：

$$FMP_{jk} = \begin{cases} 0, average(BMP_{jk}) \leq 0.5 \\ 1, average(BMP_{jk}) > 0.5 \end{cases}$$

6. Structure 融合法

由謝典佑(2006)自行開發，必須先決定出哪一個結構在判斷該節點擁有較高的辨識效果，假設為第 s 個結構的第 j 層第 k 個節點。並以這樣條件建構一個最佳選取矩陣 FIT_{jk} ，其中 FIS_{ijk} 代表第 j 層第 k 個節點在第 i 個貝氏網路下其辨識效果是否最好。

$$FIT_{jk} = (FIS_{1jk} \cdots FIS_{ijk} \cdots FIS_{mjk})$$

$$FIS_{ijk} = \begin{cases} 1, i = s \\ 0, other \end{cases}$$

再由下列式子計算出最後辨識效果

$$FMP_{jk} = \begin{cases} 0, (FIT_{jk} * MP_{jk}) < \varepsilon \\ 1, (FIT_{jk} * MP_{jk}) \geq \varepsilon \end{cases}$$

4.2.6 融合後於各演算法辨識率比較

表 13 融合後於各演算法辨識率(%)比較

專家 網路	動態	最大	最小	乘積	平均	投票	結構
一	89.7	90.3	89.7	88.0	90.5	89.7	91.2
二	89.7						
三	89.9						
四	90.1						
五	90.1						

由表 13 可看出各種演算法中，除了乘積的辨識率下降；最小及投票並沒有提升；最大、平均及結構均有提升，其中以結構融合演算法提升幅度最大，最少 1.1%，最大達到 1.5%。

5. 結論

本研究發現單一貝氏網路分別都能利用動態決斷值來提升靜態決斷值的辨識效果；利用六種演算法將五組不同貝氏網路模組融合，其中以結構融合演算法所提升的辨識效果最高。

本研究目前完成貝氏網路診斷工具的測試，尚未完成的部份為：依診斷結果連結補救教學動畫及利用實驗研究法進行前、後測的實驗，以了解本套系統在減少學生錯誤類型發生的效果。

參考文獻

[1] 呂靜芳，由網站行為歷程以貝式學習建立

學習者模式之引導系統。國立中央大學資訊工程碩士論文，2000。

[2] 李俊儀，以貝氏網路為基礎的電腦化適性測驗選題策略-以國小數學科診斷測驗為例。國立台中教育大學數學教育學系碩士論文，2005。

[3] 施淑娟，應用貝氏網路認知診斷模式進行國小五年級小數單元學習診斷之研究。國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系博士論文，2006。

[4] 許雅菱，貝氏網路在教育測驗分析上的應用。國立台中教育大學數學教育學系碩士論文，2005。

[5] 潘俊帆，以貝氏網路為基礎的個人差異化知識處理機制。東海大學工業工程學系碩士論文，2001。

[6] 謝典佑，多重貝氏網路在教育測驗上的應用。國立台中教育大學數學教育學系碩士論文，2006。

[7] Ludmila I Kuncheva, Combining Pattern Classifiers Methods and Algorithms, WILEY-INTERSCIENCE A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION, 2003.